ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 AOUT 1919.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON GUIGNARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les représentations propres d'un entier par les formes positives d'Hermite, dans un corps quadratique imaginaire.* Note [1] de M. G. HUMBERT.

1. *Représentations ordinaires et étendues.* — Désirant donner un aperçu de mes recherches sur les formes d'Hermite, je commencerai par la *représentation*, en étendant une méthode d'Hermite.

Soit $\mathcal{C}$ le corps quadratique $i\sqrt{P}$, où P est entier positif, sans diviseur carré (autre que 1), et $P \equiv 1$ ou 2 (mod 4). Soit la forme *positive* d'Hermite

$$f(x, y) = axx_0 + bx_0y + b_0xy_0 + cyy_0, \tag{1}$$

a et c entiers ordinaires *positifs*, b et b_0 entiers conjugués de $\mathcal{C}$; x_0 et y_0 conjugués de x et y; le *discriminant* Δ est $\Delta = ac - bb_0$; il est *positif*. La forme f est *proprement primitive* lorsque, a et c n'étant pairs à la fois, a, b, b_0, c n'ont aucun diviseur, entier réel, commun.

Deux formes (1) sont *équivalentes* si elles sont liées par une substitution linéaire, à coefficients entiers dans $\mathcal{C}$, et de *déterminant* $+1$, effectuée sur x, y, les x_0, y_0 subissant la conjuguée. Les formes équivalentes entre elles forment une *classe*.

On dit que f représente m, positif entier, si $f(u, v) = m$, u et v étant des entiers de $\mathcal{C}$; ce sera une *représentation ordinaire* de m par f.

---

[1] Séance du 11 août 1919.

Si u et v sont des entiers d'un même idéal, I, de conjugué I_0, de $\mathfrak{C}$, les uu_0, uv_0, vu_0, vv_0 sont divisibles par la *norme* de I, entier positif ordinaire, que nous écrirons II_0; donc $f(u, v) : II_0$ est un entier (rationnel) positif, m, et

$$(2) \qquad m = \frac{1}{II_0} f(u, v) = f\left(\frac{u}{I}, \frac{v}{I}\right).$$

En d'autres termes, m est le résultat *formel* qu'on obtient en remplaçant x et y, dans $f(x, y)$, par $\frac{u}{I}, \frac{v}{I}$, et, naturellement, x_0, y_0 par $\frac{u_0}{I_0}, \frac{v_0}{I_0}$.

Nous dirons que c'est là une *représentation étendue* de m par f, et qu'elle *appartient à l'idéal* I.

Les représentations ordinaires appartiennent à l'idéal 1.

La représentation (2) sera dite *propre* si u et v ont I pour plus grand commun diviseur, c'est-à-dire si les *idéaux* $\frac{u}{I}$ et $\frac{v}{I}$ sont premiers entre eux.

2. *Relation entre les représentations appartenant à des idéaux équivalents.* — Si I′ est de la même classe que I, les *idéaux* $\frac{uI'}{I}$ et $\frac{vI'}{I}$ sont principaux, soient u' et v'; on a donc, *entre idéaux*, les relations

$$\frac{u}{I} = \frac{u'}{I'}, \qquad \frac{v}{I} = \frac{v'}{I'},$$

u' et v' étant des entiers de I′. On en déduit aisément que les $f\left(\frac{u}{I}, \frac{v}{I}\right)$ coïncident avec les $f\left(\frac{u'}{I'}, \frac{v'}{I'}\right)$ et que, pour obtenir les représentations *propres* qui appartiennent aux idéaux d'une même classe, on pourra choisir, dans celle-ci, un idéal particulier.

3. *Congruence fondamentale.* — Nous supposerons m (*positif*) *premier à* 2Δ dans tout ce qui suit; nous choisirons, dans une classe donnée d'idéaux, un idéal I, de base $(q, g + i\sqrt{P})$; q et g sont des entiers ordinaires, q *positif*, et $g^2 + P \equiv 0 \pmod{q}$.

La forme binaire, φ, positive, de discriminant P,

$$\varphi = qx^2 + 2gxy + \frac{1}{q}(g^2 + P)y^2,$$

est dite *associée* à I; elle est *proprement primitive*, comme cela résulte de $P \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$ et de ce que P n'a pas de diviseur carré. En remplaçant au besoin φ par une forme équivalente, et dès lors I par un idéal équivalent, on a le droit de supposer q premier à $2P\Delta m$.

Soit alors une représentation *propre*, (2), appartenant à I, de m par f; on voit aisément que, u et v ayant le plus grand commun diviseur I, on peut trouver dans I_0 (idéal conjugué de I) deux entiers u' et v' tels que $uv' - vu' =$ norme de I, ou

$$(3) \qquad uv' - vu' = II_0.$$

Faisons alors, dans la forme (1), $f(x, y)$, la substitution

$$(4) \qquad x = uX + u'Y; \qquad y = vX + v'Y,$$

x_0 et y_0 subissant la conjuguée; on trouve, en tenant compte de (2),

$$(5) \qquad f(x, y) = F(X, Y) = mII_0XX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0,$$

B et B_0 étant conjugués, et étant posé

$$(6) \quad B = auu'_0 + bu'_0v + b_0uv'_0 + cv_0v'; \qquad C = au'u'_0 + bu'_0v' + b_0u'v'_0 + cv'v'_0$$

(u_0, ... conjugués de u, ...). F(X, Y) est une forme d'Hermite du corps $\mathfrak{S}$, *positive* comme f, et de discriminant $\Delta I^2 I_0^2$, puisque la substitution (5) a le déterminant II_0. De plus, par (6), et puisque u, v, u'_0, v'_0 sont de I et u_0, v_0, u', v' de I_0, on voit que B, B_0, C sont respectivement des entiers des idéaux I^2, I_0^2, II_0. En particulier, $C = nII_0$, n étant entier ordinaire positif, et l'on a ainsi

$$f(x, y) = F(X, Y) = mII_0XX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + nII_0YY_0.$$

L'expression du discriminant donne $mnI^2I_0^2 - BB_0 = \Delta I^2 I_0^2$, ce que nous écrirons $\frac{BB_0}{I^2 I_0^2} = -\Delta + mn$, ou sous forme de congruence

$$(7) \qquad \frac{BB_0}{I^2 I_0^2} \equiv -\Delta \pmod{m},$$

étant entendu que B est un entier de l'idéal I^2 (donc B_0 de I_0^2).

Ainsi, à toute représentation *propre*, *appartenant à* I, de m par f, répond une solution B, de la congruence (7), B étant un entier de I^2.

4. *Réciproquement*, soit B un entier de I^2, solution de (7); on aura

$$(8) \qquad \frac{BB_0}{I^2 I_0^2} = -\Delta + mn,$$

n étant un entier ordinaire, évidemment positif; la forme d'Hermite :

$$(9) \qquad F(X, Y) = mII_0XX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + nII_0YY_0,$$

est *positive* et de *discriminant* $\Delta I^2 I_0^2$, [par (8)]; soient u et v deux entiers quelconques de I, ayant I pour plus grand commun diviseur, et u', v' deux entiers de I_0, choisis tels que $uv' - vu' = II_0$; faisons alors dans $F(X, Y)$ la substitution (4), c'est-à-dire

$$(10) \qquad II_0 X = v'x - u'y; \qquad II_0 Y = -vx + uy;$$

on reconnaît que, dans la forme en x, y, au second membre, les coefficients de xx_0, xy_0, $x_0 y$, yy_0 sont entiers de $\mathfrak{C}$, les deux extrêmes étant entiers ordinaires : le premier est, par exemple,

$$(11) \qquad \frac{m}{II_0} v' v'_0 - \frac{B}{I^2 I_0^2} v' v_0 - \frac{B_0}{I^2 I_0^2} v' v'_0 + \frac{n}{II_0} v v_0;$$

il est entier (et évidemment réel) parce que v et v'_0 sont de I; v_0 et v' de I_0, et B, B_0 de I^2, I_0^2 respectivement. Dès lors, la forme en x, y est une forme d'Hermite du corps $\mathfrak{C}$, positive comme F, et *de discriminant* Δ, soit $f(x, y)$.

D'autre part, par (9), $F(1,0)$ est mII_0; pour $X = 1$, $Y = 0$, on a, dans (4), $x = u$, $y = v$; donc $f(u, v) = mII_0$, et, d'après les hypothèses sur u et v, cela exprime que m admet, par f, une *représentation propre, appartenant à* I.

De ce que m et II_0 (ou q) sont premiers à 2Δ, et des expressions, telles que (6), des coefficients de F en fonction de ceux de f, on conclut aisément que ces derniers ne peuvent avoir un diviseur premier réel commun et que *$f(x, y)$ est une forme d'Hermite positive, proprement primitive, de discriminant Δ.*

Enfin, si B et B' sont deux solutions (dites *non distinctes*) de (7), telles que $B' = B + \theta m$, θ étant un entier de l'idéal I^2, les deux formes $f(x, y)$ et $f'(x', y')$, obtenues en partant de B et de B' sont *équivalentes*. Car on voit de suite que les formes $F(X, Y)$ et $F(X', Y')$ se correspondent par $X' = X + \frac{\theta_0}{II_0} Y$; $Y' = Y$; alors, par (4) et par les relations analogues entre x', y', X', Y', les u, v, u', v' restant les mêmes, on trouve, entre les x, y et les x', y' une substitution à coefficients entiers dans $\mathfrak{C}$ et de déterminant $+1$.

Conséquence analogue si, partant de *la même* solution B de (7), on donne aux u, v, u', v' *d'autres valeurs*, satisfaisant aux hypothèses : on trouvera une forme équivalente à celle, $f(x, y)$, obtenue d'abord.

5. *Conclusion.* — Soient $f_1(x, y)$, f_2, ..., f_H, des formes d'Hermite du corps $\mathfrak{C}$, choisies, une par classe, dans les H classes positives, proprement

primitives, de discriminant Δ. Pour obtenir les représentations propres, appartenant à un idéal I, de m entier positif, premier à 2Δ, par l'ensemble des f_i, on partira de la congruence (7) :

$$\frac{BB_0}{I^2 I_0^2} \equiv -\Delta \pmod{m}. \tag{7}$$

B étant assujetti à être un nombre de I^2; on ne considère pas comme distinctes deux solutions, B et B′, telles que $\frac{B'-B}{m}$ soit un entier de I^2.

A toute représentation, appartenant à I, de m par une f_i, répond une solution, B, de la congruence; réciproquement, à une solution B répond une forme, f, proprement primitive, positive, de discriminant Δ, donc équivalente à *une* f_i, donnant de m une représentation propre appartenant à I. A cette représentation en correspond évidemment une *de même nature* par la f_i, et non seulement une, mais autant qu'il y a de substitutions unitaires faisant passer de f à f_i.

Si donc k_i est le nombre des transformations linéaires, à coefficients entiers du corps $\mathfrak{C}$ et de déterminant 1, de f_i en elle-même, on en conclut, en répétant des raisonnements classiques et en s'appuyant sur les nos 3 et 4, que *le nombre des représentations propres, appartenant à* I, *de m par les f_i, une représentation par f_i comptant pour* $\frac{1}{k_i}$, *est égal au nombre des solutions distinctes de la congruence* (7).

6. *Nombre des solutions de la congruence.* — Celle-ci se met sous une forme simple. Posons pour un instant $I^2 = J$; on a $I = (q, g + i\sqrt{P})$; on aura aussi [1] $J = (Q, G + i\sqrt{P})$ et $Q = q^2$, car Q et q sont les normes de I^2 et de I.

Or, B étant de J, on a $B = Qx + (G + i\sqrt{P})y$, x et y entiers ordinaires quelconques, et (7) s'écrit, puisque $I^2 I_0^2 = JJ_0 =$ norme de $J = Q$,

$$(Qx + Gy)^2 + Py^2 \equiv -\Delta Q \pmod{mQ}. \tag{12}$$

Mais le premier membre, par sa forme même, est multiple de Q, car

(1) Si $I = (q, g + i\sqrt{P})$, pour que I^2 soit de la même forme, il faut et il suffit, comme on le voit aisément, qu'aucun des facteurs premiers communs à q et g ne divise P ou $2g$. Or, q est *impair*, premier à P (no 3); d'autre part, si q et $2g$ avaient un facteur premier commun, p (nécessairement impair), ce p diviserait P, parce que $\frac{g^2+P}{q}$ est entier; d'où contradiction, q étant premier à P.

$G^2 + P \equiv 0 \pmod{Q}$; d'autre part, $Q = q^2$ et q est premier à m (n° 3), en sorte que (12) équivaut à

$$(13) \qquad (q^2 x + Gy)^2 + Py^2 \equiv -\Delta q^2 \pmod{m}.$$

A deux solutions, B et B', *non distinctes* de (7), répondent deux solutions x, y et x', y' de (13) vérifiant (on le voit aisément) $x' \equiv x$, $y' \equiv y \pmod{m}$; on a donc à chercher le nombre de solutions x, y de (13), *distinctes dans le sens ordinaire*. C'est aussi celui, N, des solutions X, Y, distinctes, de $X^2 + PY^2 \equiv -\Delta q^2 \pmod{m}$, m étant premier à 2Δ et q à $2\Delta m P$.

Or, Hermite a fait connaître ce dernier nombre [1] dans le cas où m est aussi premier à P; il trouve pour N l'expression

$$(14) \qquad p^{\alpha-1} p'^{\alpha'-1} \cdots \left[p - \left(\frac{-P}{p}\right)\right]\left[p' - \left(\frac{-P}{p'}\right)\right] \cdots,$$

en supposant pour m, décomposé en facteurs *premiers*, $m = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots$.

Mais nous aurons besoin d'avoir N lorsque m, premier à 2Δ, ne l'est pas à P; nous supposerons alors, dans tout ce qui suit, que Δ et P n'ont aucun facteur *impair* commun.

Soient ρ les facteurs premiers impairs de P tels que $\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) = +1$; σ ceux tels que $\left(\frac{-\Delta}{\sigma}\right) = -1$. Il est clair que si m renferme un facteur σ, la congruence $X^2 + PY^2 \equiv -\Delta q^2 \pmod{m}$ n'a pas de solution. Considérons maintenant la congruence

$$(15) \qquad X^2 + PY^2 \equiv -\Delta q^2 \qquad \pmod{\rho^\beta};$$

si n_β est le nombre des solutions X, Y de (15), on trouve facilement, en suivant la marche d'Hermite (*loc. cit.*), et en se rappelant que P est sans facteur carré, $n_\beta = \rho n_{\beta-1}$, et, directement, $n_1 = 2\rho$. Donc $n_\beta = 2\rho^\beta$; on déduit alors des principes d'Hermite que si

$$(16) \qquad m = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots \rho^\beta \rho'^{\beta'} \ldots,$$

les p, p', ... étant premiers à P, on aura le nombre N cherché en *multipliant* l'expression (14) par $2\rho^\beta . 2\rho'^{\beta'} \ldots$; donc

$$(17) \qquad N = p^{\alpha-1}\left[p - \left(\frac{-P}{p}\right)\right] p'^{\alpha'-1}\left[p' - \left(\frac{-P}{p'}\right)\right] \cdots 2\rho^\beta . 2\rho'^{\beta'} \ldots.$$

Et N = 0, si m renferme un ou plusieurs facteurs σ.

---

[1] Hermite, *Œuvres*, t. I, p. 247. — Voir aussi *Crelle*, t. 47.

Tel est, *en supposant* m *premier à* 2Δ, *et* Δ *sans diviseur impair commun avec* P, le nombre des représentations propres, appartenant à un idéal I donné, de m par l'ensemble des f_i $\left(\text{une représentation par } f_i \text{ comptant pour } \frac{1}{k_i}\right)$. Ce nombre est indépendant de l'idéal I; c'est donc, en particulier, celui des représentations *ordinaires* propres de m par les f_i.

ASTRONOMIE. — *Sur le développement d'une fonction très générale du rayon vecteur et de l'anomalie excentrique dans le mouvement elliptique.* Note de M. **H. Andoyer.**

Dans une Note insérée au Tome 91 des *Comptes rendus* (séance du 6 décembre 1880), Tisserand a fait connaître une formule relative au mouvement elliptique, propre à donner le développement d'une fonction quelconque du rayon vecteur suivant les cosinus des multiples de l'anomalie moyenne et suivant les puissances de l'excentricité : sa démonstration est d'ailleurs longue et peu simple.

En réalité, la formule de Tisserand n'est qu'un cas particulier d'une formule plus générale, qui résulte immédiatement du théorème bien connu dû à Cauchy, relatif au développement d'une fonction périodique quelconque de l'anomalie excentrique suivant les cosinus et sinus des multiples de l'anomalie moyenne.

Désignons par ε l'excentricité, par u et g les anomalies excentrique et moyenne, par e la base des logarithmes naturels et par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$; faisons aussi

$$x_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{ig}, \qquad x_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{-ig}, \qquad y_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iu}, \qquad y_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iu}.$$

Soit f une fonction développable suivant les puissances entières non négatives de y_1 et y_2; elle est développable de la même façon suivant les puissances de x_1 et x_2, et le théorème ci-dessus rappelé de Cauchy peut manifestement s'énoncer de la façon suivante :

Le coefficient A_{p_1, p_2} de $x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ dans le second développement de f est égal au coefficient de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ dans le développement de la fonction analogue

$$(1 - y_1 - y_2) f e^{(p_1 - p_2)(y_1 - y_2)}.$$

Introduisons les deux symboles d_1 et d_2, en convenant de remplacer

$d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} f_0$ par $\left(\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f}{\partial y_1^{\alpha_1}\,\partial y_2^{\alpha_2}}\right)_{y_1=y_2=0}$, et en particulier f_0 par $f(0, 0)$. La formule de Taylor permet d'écrire symboliquement

$$f(y_1, y_2) = f_0 e^{d_1 y_1 + d_2 y_2},$$

de sorte que le coefficient A_{p_1, p_2} est celui de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ dans le développement de la fonction

$$(1 - y_1 - y_2) f_0 e^{(d_1+p_1-p_2)y_1 + (d_2-p_1+p_2)y_2};$$

par suite

$$A_{p_1, p_2} = (d_1 d_2 - p_1 d_1 - p_2 d_2) \frac{(d_1 + p_1 - p_2)^{p_1-1} (d_2 - p_1 + p_2)^{p_2-1}}{p_1!\, p_2!} f_0;$$

ou bien, explicitement,

$$A_{p_1, p_2} = \sum \frac{d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} f_0}{\alpha_1!\, \alpha_2!} (-1)^{p_2-\alpha_2} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(p_1 - p_2)^{p_1+p_2-\alpha_1-\alpha_2-1}}{(p_1 - \alpha_1)!\,(p_2 - \alpha_2)!},$$

formule que l'on obtient encore aisément, sans faire usage d'aucun symbole.

Si l'on préfère mettre en évidence l'excentricité et l'anomalie moyenne, il suffit d'observer que A_{p_1, p_2} est le coefficient de $\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_2} e^{i(p_1-p_2)g}$ dans le développement considéré de f.

On peut aussi faire $y_1 + y_2 = z_1$, $y_1 - y_2 = z_2$, et prendre la fonction f sous la forme $f(z_1, z_2)$. Si alors D_1 et D_2 sont les symboles analogues à d_1 et d_2, mais relatifs à z_1, z_2, il suffit, dans la formule symbolique précédente, de remplacer d_1 par $D_1 + D_2$, d_2 par $D_1 - D_2$.

Si la fonction f ne dépend que du rayon vecteur, c'est-à-dire de z_1, on peut faire $D_2 = 0$, et l'on retrouve ainsi la formule de Tisserand :

$$A_{p_1, p_2} = D_1 (D_1 - p_1 - p_2) \frac{(D_1 + p_1 - p_2)^{p_1-1} (D_1 - p_1 + p_2)^{p_2-1}}{p_1!\, p_2!} f_0.$$

Si la fonction f ne dépend que de z_2, c'est-à-dire de la différence $u - g$, on a $D_1 = 0$, et l'on obtient le résultat très simple

$$A_{p_1, p_2} = (-1)^{p_2} D_2 \frac{(D_2 + p_1 - p_2)^{p_1+p_2-1}}{p_1!\, p_2!}.$$

Si, dans le cas général, on fait $\varphi(y_1, y_2) = (1 - y_1 - y_2) f$, on peut écrire

$$A_{p_1, p_2} = \frac{(d_1 + p_1 - p_2)^{p_1} (d_2 - p_1 + p_2)^{p_2}}{p_1!\, p_2!} \varphi_0$$
$$= \sum \frac{d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \varphi_0}{\alpha_1!\, \alpha_2!} (-1)^{p_2-\alpha_2} \frac{(p_1 - p_2)^{p_1+p_2-\alpha_1-\alpha_2}}{(p_1 - \alpha_1)!\,(p_2 - \alpha_2)!},$$

et l'on peut introduire D_1 et D_2 comme ci-dessus.

On sait encore, toujours d'après Cauchy, que si l'on fait

$$\psi = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = z_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial u},$$

le coefficient A_{p_1, p_2} est égal à celui de $y_1^{p_1} y_2^{p_2}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{\psi}{p_1 - p_2} e^{(p_1 - p_2)(y_1 - y_2)}$$

si du moins le nombre $p_1 - p_2$ n'est pas nul.

On peut par suite, dans la formule précédente, remplacer la fonction φ par ψ, à la condition de diviser en même temps par $p_1 - p_2$, quand ce nombre n'est pas nul.

ZOOLOGIE. — *Mutation d'une Caridine en Ortmannie et observations générales sur les mutations évolutives des Crevettes d'eau douce de la famille des Atyidés.* Note [1] de MM. E.-L. **Bouvier** et **d'Emmerez de Charmoy**.

Au cours de recherches commencées il y a quinze ans, l'un de nous avait été conduit [2] à l'hypothèse que certains Atyidés indo-pacifiques des genres *Caridina* et *Ortmannia* donnent actuellement naissance à des individus de leur type et à d'autres qui appartiennent au type générique immédiatement supérieur; pour préciser, qu'en outre des individus de leur espèce, les *Caridina Richtersi* Thallw. (de l'île Maurice) doivent produire également des *Ortmannia Edwardsi* Bouvier, les *Ortmannia Alluaudi* Bouvier des *Atya serrata* et les *Ortmannia Henshawi* (des Sandwich) des *Atya bisulcata* Randall. Cette hypothèse avait pour fondement l'extraordinaire variabilité des individus du type inférieur, qui se rapprochent à divers degrés du type ortmannien ou atyien, et la fixité absolue des représentants du type supérieur qui d'ailleurs ne diffèrent des autres que par leurs caractères génériques. Pour l'une des espèces précédentes, elle a été vérifiée expérimentalement à la Réunion par M. Bordage [3] qui, au moyen d'éducations faites en aquarium, a constaté : 1° Que les femelles d'*Ortmannia Alluaudi*,

---

(1) Séance du 11 août 1919.

(2) E.-L. Bouvier, *Observations nouvelles sur les Crevettes de la famille des Atyidés* (*Bull. Scient. de France et de Belgique*), vol. 39, 1905.

(3) Edmond Bordage, *Mutation et régénération hypotypique chez certains Atyidés* (*Ibid.*, vol. 43, 1909).

dans une même ponte, produisent des individus de leur espèce, et, en quantité un peu plus faible, des *Atya serrata*; 2° Que les femelles de l'*Atya serrata* ne donnent que des individus atyiens, sans régression aucune vers la forme ortmannienne. Il était hautement désirable que l'hypothèse fût également vérifiée pour les Caridines, et c'est à quoi s'employa un grand propriétaire de Maurice, M. Paul Carié, qui réunit à cet effet le matériel nécessaire et le remit à l'un de nous pour faire en aquarium l'élevage du *Caridina Richtersi*. La présente Note a pour objet de mettre en évidence les observations faites à l'île Maurice en 1914, au cours de ces élevages, et à Paris sur les matériaux obtenus. Avant de les rapporter, nous croyons utile de dire que l'*Ortmannia Edwardsi* est beaucoup moins répandu dans l'île que le *Caridina Richtersi*, qu'on l'observe dans les mêmes lieux, et qu'il présente les mêmes variations de couleurs, depuis le bleu uniforme et le rouge vif, jusqu'à un ton noirâtre, parfois avec un panachage fort accusé.

Les œufs du *Caridina Richtersi* et de l'*Ortmannia Edwardsi* atteignent des dimensions considérables (un millimètre environ), ce qui permet à leurs embryons de se développer largement au moyen du vitellus ovulaire. En fait les élevages effectués à Maurice ont permis d'établir que les deux formes traversent dans l'œuf les stades larvaires propres à la plupart des Atyidés, qu'ils naissent à l'état de jeunes peu différents de l'adulte et qu'ils atteignent leur structure définitive en passant par trois stades successifs.

C'est en 1915 que furent envoyés à Paris les matériaux résultant des captures et des élevages effectués à Maurice. L'époque n'était guère propice à une étude délicate et l'on ne put les examiner que très rapidement. Ils comprenaient les diverses espèces d'Atyidés mauriciens, dont plus de 1000 *Caridina Richtersi*, 90 *Ortmannia Edwardsi*, et 5 lots d'élevage, à savoir : 9 jeunes aux 2e et 3e stades issus du *Caridina Richtersi*, 18 au 1er stade issus de l'*Ortmannia Edwardsi*, 8 au 2e, 2 au 3e, et 95 adultes provenant également de l'élevage de cette dernière forme.

L'étude récente de ce précieux matériel a conduit aux observations suivantes dont on ne saurait nier l'importance.

Les 9 jeunes issus du *Caridina Edwardsi* provenaient d'une femelle noirâtre et ont tous conservé, après cinq ans, la même teinte que leur mère : 8 présentent les caractères de l'espèce ou de sa forme *apiocheles*, mais l'autre est du type ortmannien le plus net et ressemble absolument, même pour les plus menus détails, aux jeunes d'*Ortmannia Edwardsi* étudiés plus loin. C'est la confirmation de l'hypothèse et l'extension à notre Caridine des observations de Bordage sur l'*Ortmannia Alluaudi*; *de même que les*

femelles de cette Ortmannie donnent en même temps des individus de leur type et du type générique supérieur, de même celles du Caridina Richtersi *produisent simultanément des Caridines et des Ortmannies*, et franchissent brusquement un degré de l'échelle zoologique; toutefois, cette mutation semble plutôt rare et à son début, tandis que l'*Ortmannia Alluaudi* donne en abondance des *Atya serrata*.

L'étude des jeunes de l'*Ortmannia Edwardsi* n'est pas moins instructive. Quel que soit leur stade, ils sont tous du type ortmannien le plus franc, à l'exception d'un jeune *Caridina Richtersi* qui se trouvait mêlé aux 18 du premier stade. Mais cet exemplaire provenait sûrement d'une autre ponte et avait dû s'introduire accidentellement dans l'eau d'élevage; car les jeunes *Ortmannia Edwardsi* des deux premiers stades ne présentent pas encore au bout des doigts le pinceau de poils caractéristique des Atyidés, et leurs griffes terminales sont au nombre de 3 superposées quand on les examine latéralement, comme celles des *Ortmannia Edwardsi* adultes [1]; or, la jeune Caridine à laquelle je fais allusion présentait déjà les bouquets de poils, elle se trouvait par conséquent à un stade plus avancé et, au milieu des jeunes Ortmannies, frappait comme une intruse. Les 95 adultes obtenus d'élevage par M. de Charmoy justifient amplement cette observation; ils comprennent 78 femelles et 17 mâles, sans mélange aucun avec des Caridines, sans variations notables, et tous du type *Ortmannia Edwardsi* comme la femelle dont ils étaient issus. De sorte que l'*Ortmannia Edwardsi* ne retourne pas plus à la forme Caridine que l'*Atya serrata* à la forme ortmanienne; *une fois réalisée, la mutation ne rétrograde pas*. C'est encore la confirmation des expériences de Bordage sur l'*Ortmannia Alluaudi*.

Ces phénomènes sont vraiment extraordinaires et semblent tout d'abord pouvoir s'expliquer par l'hybridation, c'est-à-dire par un croisement entre deux formes génériques différentes : entre le *Caridina Richtersi* et l'*Ortmannia Edwardsi* d'un côté, entre l'*Ortmannia Alluaudi* et l'*Atya serrata* de l'autre. Alors les individus appartenant au type générique inférieur (Caridinien dans le premier cas, Ortmannien dans l'autre) seraient des hétérozygotes où se fusionneraient, à des degrés très divers, certains traits des deux parents, — et ceux du type générique supérieur (Ortmannien d'un côté, Atyien de l'autre), des homozygotes où se rencontreraient purs les

---

(1) Il y a 5 griffes groupées en deux paires et une impaire dans l'*Ortmannia Edwardsi*, mais, latéralement, on ne voit que 3 griffes. Les individus typiques ont un stylet et ceux de la variété *apiocheles* une griffe.

seuls caractères de ce type. Mais cette hypothèse a contre elle l'observation et l'expérience.

On sait, en effet, que la fusion des caractères des deux parents est plutôt exceptionnelle chez les hybrides, alors que les individus à caractères mixtes prédominent dans le *Caridina Richtersi* et l'*Ortmannia Alluaudi*. D'ailleurs, si cette fusion existait réellement, elle porterait sur les caractères génériques essentiels aussi bien que sur les autres, alors qu'on observe un hiatus très net entre les espèces précédentes et celles qui en dérivent : jamais on ne trouve, dans l'*Ortmannia Alluaudi*, les longs poils plumeux qui caractérisent le pinceau digital de l'*Atya serrata*, et jamais je n'ai pu constater dans le *Caridina Richtersi*, même dans sa forme *apiocheles*, les ongles multiples qui terminent les doigts des pinces dans l'*Ortmannia Edwardsi*. Au surplus l'exemple du *Caridina brevirostris* donne la preuve certaine que les individus à caractères mixtes ne sont pas le résultat d'une hybridation; cette espèce est encore plus variable que la Caridine de Richters et présente comme elle tous les passages entre la forme typique et la forme apiochéline; les individus de cette dernière forme sont déjà quelque peu ortmanniens et l'on pourrait les attribuer au croisement de la forme typique avec une Ortmannie; mais les *Ortmannia* manquent totalement aux Seychelles ([1]), où pullule par contre le *Caridina brevirostris ;* je n'en ai trouvé aucune parmi les 3000 individus recueillis dans ces îles au cours de l'expédition anglaise dirigée par M. Stanley Gardiner, et il faut attribuer à un état d'équilibre instable, non au croisement, les variations extraordinaires de cette Caridine. J'ajoute que l'expérience n'est pas moins contraire que l'observation à l'hypothèse des croisements. Bordage rapporte qu'il n'a pu obtenir « la fécondation des femelles d'Ortmannie par des mâles d'Atye », alors qu'il réalisait « sans difficulté la fécondation des Ortmannies femelles par des mâles de leur espèce ». D'autre part, il est bien évident que les femelles d'*Atya serrata* ne se croisent pas avec les mâles de l'*Ortmannia Alluaudi* et celles de l'*Ortmannia Edwardsi* avec les mâles du *Caridina Richtersi*, car les expériences de M. Bordage et les précédentes ont montré que les premières comme les secondes produisent exclusivement des individus de leur forme propre et d'un type très pur, sans variation de grande importance.

([1]) Pourtant Hilgendorf a reçu des « Seschellen » (les Seychelles probablement) sept exemplaires d'une espèce indéterminée qu'il range dans le genre *Alyoida* et qui doit être soit l'*Ortmannia Alluaudi*, soit la mutation *serrata*, en tout cas une forme bien plus grande que le *Caridina brevirostris* et très différente (*Crustacea* in *v. d. Decken Reisen in Ost. Afrika*, p. 101, 1869).

Nous voici donc en présence d'un polymorphisme qui ne peut être attribué qu'à des mutations, et qui diffère de tous les exemples de polymorphisme connus en ce qu'il est indépendant du sexe, des saisons, de l'habitat, surtout en ce qu'il permet à l'espèce de franchir, *par un saut brusque*, les limites qui lui sont propres *pour acquérir une forme stable dans le genre immédiatement supérieur*. Dans notre groupe, cette évolution brusque suit des règles absolument rigoureuses : l'espèce mutante se distingue par un état d'équilibre instable, par une véritable explosion de caractères dont certains ne présentent aucun rapport visible avec la direction évolutive suivie par la famille, tandis que d'autres, plus intéressants, annoncent à divers degrés le type générique immédiatement supérieur. Au premier stade, qui nous est offert par le *Caridina brevirostris*, ces derniers caractères ne franchissent pas, *actuellement* tout au moins, les limites de l'espèce et du genre ; — dans le deuxième, auquel se trouve le *Caridina Richtersi*, un très petit nombre d'individus franchissent l'hiatus qui les sépare du genre immédiatement supérieur (*Ortmannia*) où ils trouvent la stabilité ; — au troisième, qui est celui de l'*Ortmannia Alluaudi*, certainement aussi de l'*Ort. Henhawi*, la mutation bat son plein et de nombreux individus atteignent la forme stable, qui est représentée par le genre *Atya*.

Ainsi, sous nos yeux, on voit avancer successivement de deux degrés, par saut brusque, l'évolution des Atyidés : les Caridines se transforment en Ortmannies et les Ortmannies en *Atya*. Et si l'on conclut du présent au passé, on est en droit d'admettre que les deux formes génériques supérieures de la famille, les *Ortmannia* et les *Atya*, ont dû se produire jadis de même. Très différentes des mutations légères qui se manifestent en tout sens, et autant qu'il paraît, sans suivre une ligne définie, ces grandes variations *suivent la direction même de la lignée* et transforment d'un seul coup le type générique de l'espèce qui les subit; en quoi elles méritent le nom de *mutations évolutives* ou de *phylomorphoses* qu'un de nous leur a donné ([1]). On les observera sans doute ailleurs, et sans doute ont-elles joué autrefois un grand rôle dans l'évolution organique; peut-être faut-il expliquer par elles les nombreux hiatus qui forment solutions de continuité dans la série des êtres vivants et fossiles. En tout cas, elles montrent que le transformisme n'est pas seulement une belle hypothèse, mais une réalité qui se manifeste actuellement par des phénomènes évolutifs brusques et de grande envergure.

([1]) E.-L. Bouvier, *Nouvelles observations sur les mutations évolutives* (*Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 1820).

CORRESPONDANCE.

MM. **Boquet**, **Georges Giraud**, **L.-C. Maillard**, **Raclot** adressent des remercîments pour les distinctions que l'Académie a accordées à leurs travaux.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries ultrasphériques.* Note [1] de M. **Erwand Kogbetliantz**, transmise par M. Appell.

Envisageons la série ultrasphérique de $F(\theta, \varphi)$

$$(1)\qquad F(\theta,\varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\lambda}{2\pi} \int\!\!\int_S \frac{F(\theta',\varphi')\, P_n^{(\lambda)}(\cos t)\, d\sigma'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}} \qquad (\lambda > 0).$$

Le but de cette Note est d'étudier la sommabilité (C, δ) de la série (1) pour $\lambda - 1 < \delta \leqq \lambda$ [2]. Les résultats sont basés sur les propriétés suivantes de la série

$$\sum (n+\lambda) \int_{\omega}^{\pi} P_n^{(\lambda)}(\cos u)\,(\sin u)^{2\lambda}\, du.$$

I. Elle est sommable $(C, \delta > \lambda - 1)$ et a zéro pour somme, si $\omega > 0$, la sommabilité étant uniforme pour $\pi \geqq \omega \geqq \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$;

II. Ses moyennes arithmétiques $S_n^{(\delta)}(\omega)$ d'ordre $\delta > \lambda - 1$ sont bornées:

$$|S_n^{(\delta)}(\omega)| = \left| \int_{\omega}^{\pi} S_n^{(\delta,\lambda)}(u)\,(\sin u)^{2\lambda}\, du \right| < H$$
$$(\delta > \lambda - 1;\quad \pi \geqq \omega \geqq 0;\quad n = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

En s'appuyant sur la formule approximative pour la moyenne $s_n^{(\delta,\lambda)}(u)$ de la série $\sum (n+\lambda).P_n^{(\lambda)}(\cos u)$ et sur I, on démontre le théorème :

Soit $|F(\theta', \varphi')|\,|[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]|^{\lambda - \frac{1}{2}}$ *intégrable sur* S. *La série* (1) *est*

---

[1] Séance du 28 juillet 1919.

[2] La sommabilité $(C, \delta > \lambda)$ est étudiée dans les Notes précédentes : *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 601; t. 164, 1917, p. 626; t. 168, 1919.

sommable ($C, \delta = \lambda$) *et a pour somme la valeur moyenne de* $F(\theta, \varphi)$ *au point* (θ, φ), *si* $F(\theta, \varphi)$ *est à variation bornée dans le voisinage de ce point et si elle ne devient infinie au point diamétralement opposé* $M_0(\pi - \theta, \pi + \varphi)$ *que d'ordre* γ_0 *moindre que* $\lambda + 1$. *Pour* $\gamma_0 \geqq \lambda + 1$ *la série* (1) *n'est pas sommable* ($C, \delta = \lambda$).

Mais on a davantage : on démontre que, pour $\gamma_0 < \lambda + 1$, les conditions suffisantes de la sommabilité (C, γ) de la série (1) sont les suivantes :

La dérivée de l'intégrale

$$\int_0^t |\varphi(u)|\, du$$

s'annule pour $t = 0$, *et l'intégrale*

$$\int_\eta^\varepsilon |\psi(u + \eta) - \psi(u)|\, du$$

tend vers zéro avec η, où

$$\varphi(t) = \psi(t) \sin\frac{t}{2} = \xi(t) - \xi(+0)$$

et

$$2\pi(\sin t)^{2\lambda}\xi(t) = \int_C F(\theta', \varphi')\,[\sin^2\theta' \sin^2(\varphi - \varphi')]^{\lambda - \frac{1}{2}}\, ds',$$

l'intégrale de ligne étant étendue au cercle C, de centre (θ, φ) et de rayon sphérique t. On en déduit que tous les critères connus de la convergence des séries trigonométriques ($\delta = \lambda = 0$) sont aussi les critères de sommabilité (C, λ) de la série (1) pour $\gamma_0 < \lambda + 1$.

Telle est, par exemple, la condition de Lipschitz-Dini :

$$[F(\theta', \varphi') - F(\theta, \varphi)] \log t \to 0$$

avec la distance sphérique t des points (θ', φ') et (θ, φ). On voit que, *pour* $\gamma_0 < \lambda + 1$, *la sommabilité* (C, λ) *de la série* (1) *ne dépend que de la conduite de* $F(\theta, \varphi)$ *autour du point* (θ, φ).

Soit maintenant $\delta < \lambda$, $\gamma_0 < \lambda + 1$ et supposons que $F(\theta', \varphi')$ est à variation bornée sur S, sauf les voisinages des points $M_k (k \geqq 0)$, où $F(\theta', \varphi')$ est de la forme $A_k\left(\sin\frac{\omega_k}{2}\right)^{-\gamma_k} + f_k(\theta', \varphi')$, ω_k étant la distance sphérique des points (θ', φ') et M_k et $f_k(\theta', \varphi')$ étant à variation bornée. Par M_0 nous désignons le point $(\pi - \theta, \pi + \varphi)$. Pour $\delta < \lambda$ l'index de la sommabilité $(C, \delta > \lambda - 1)$ de la série (1) dépend de tous les exposants γ_k.

Désignons par γ'_k les exposants γ_k de ceux des points $M_k (k \geqq 1)$, qui se

trouvent sur les méridiens φ et $\pi+\varphi$, sauf le point M_0, et par γ''_k tous les autres γ_k, sauf γ_0. Soit δ_0 le plus grand de tous les nombres $\gamma'_k-\lambda-1$, $\gamma'_k+\lambda-2$, γ_0-1. Vu que $\gamma_0<\lambda+1$, $\gamma'_k<2\lambda+1$ et $\gamma''_k<2$, on a $\delta_0<\lambda$. On démontre que la condition $\delta>\delta_0$ est nécessaire pour la sommabilité $(C, \delta<\lambda)$ de la série (1) en point (θ, φ) et, en s'appuyant sur I et II, on a le théorème :

Le développement (1) *de la fonction* $F(\theta', \varphi')$ *de la nature indiquée n'est pas sommable* $(C, \delta \leqq \delta_0)$ *au point* (θ, φ) *et l'est* $(C, \delta>\lambda-1)$ *avec la valeur moyenne de* $F(\theta, \varphi)$ *au point* (θ, φ) *pour somme, si* $\delta>\delta_0$.

Ainsi la sommabilité $(C, \delta<\lambda)$ de la série (1) en un point dépend de la conduite de $F(\theta', \varphi')$ non seulement autour de ce point, mais aussi sur toute la sphère S. C'est le même fait qui se manifeste dans le cas des séries trigonométriques $(\lambda=0)$ pour la sommabilité $(C, \delta<0)$ [1].

Par exemple la série de Laplace $\left(\lambda=\frac{1}{2}\right)$ converge $(\delta=0)$, si $\gamma_0<1$ et tous les autres $\gamma_k<\frac{3}{2}$ diverge aux antipodes des points M_k avec $\gamma_k \geqq 1$ et diverge partout sur S, si l'un quelconque des γ_k est $\geqq \frac{3}{2}$.

GÉOMÉTRIE. — *Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées.* Note [2] de M. **René Garnier**, transmise par M. Appell.

Dans une Note récente [3], M. Axel Egnell a donné une solution géométrique élégante du problème suivant, proposé par M. Cl. Guichard :

Déterminer tous les champs vectoriels jouissant de la propriété que la dérivée du vecteur prise dans une direction perpendiculaire à ce vecteur est perpendiculaire à la direction de la différentiation.

Je voudrais montrer que la question se laisse aussi aisément résoudre par l'Analyse.

Le problème revient à déterminer six fonctions X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, des variables x, y, z, telles que l'on ait identiquement

$$dX\,dx+dY\,dy+dZ\,dz=(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)(X_1\,dx+Y_1\,dy+Z_1\,dz).$$

(1) E. Kogbetliantz, *Comptes rendus*, 1919.

(2) Séance du 4 août 1919.

(3) *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 1263.

Égalons de part et d'autre les termes en dx^2, dy^2, dz^2, il viendra

$$XX_1 = \frac{\partial X}{\partial x}, \qquad YY_1 = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad ZZ_1 = \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Écrivons maintenant que les termes rectangles sont égaux de part et d'autre; nous obtiendrons trois équations qu'on peut remplacer par les neuf suivantes :

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} uX & uY - \rho & uZ + \mu \\ vX + \rho & vY & vZ - \lambda \\ wX - \mu & wY + \lambda & wZ \end{Vmatrix},$$

où λ, μ, ρ; u, v, w désignent de nouvelles variables introduites pour la symétrie des calculs.

Pour former les conditions d'intégrabilité de ce système, posons

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \xi, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \eta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \zeta,$$

et nous obtiendrons les neuf équations suivantes :

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - u\lambda & \frac{\partial \mu}{\partial x} - u\mu & \frac{\partial \rho}{\partial x} - u\rho \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} - v\lambda & \frac{\partial \mu}{\partial y} - v\mu & \frac{\partial \rho}{\partial y} - v\rho \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} - w\lambda & \frac{\partial \mu}{\partial z} - w\mu & \frac{\partial \rho}{\partial z} - w\rho \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi X - S & \eta X & \zeta X \\ \xi Y & \eta Y - S & \zeta Y \\ \xi Z & \eta Z & \zeta Z - S \end{Vmatrix}$$

avec $2S = \xi X + \eta Y + \zeta Z$.

Exprimons maintenant qu'on a $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial x}$; il viendra

$$3(\xi\rho + \zeta\lambda) = -\frac{\partial \xi}{\partial y} X + \frac{\partial \eta}{\partial y} Y + \frac{\partial \zeta}{\partial y} Z + 2\frac{\partial \xi}{\partial x} Y;$$

à cette équation, ajoutons celle qu'on en déduit par permutation de x et z et des variables correspondantes; en vertu de l'identité

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

il viendra

$$\xi\rho + \zeta\lambda = 0,$$

et par permutation on obtiendrait deux relations analogues.

Cela étant, supposons d'abord $\lambda\mu\rho \neq 0$; nous déduirons de ces trois relations les égalités

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

qui entraînent les suivantes :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Moyennant une transformation homothétique sur X, Y, Z (et λ, μ, ρ), on peut supposer $\varphi = 1$; dès lors, d'après (2), λ, μ, ρ seront des constantes, et, d'après (1), le vecteur (X, Y, Z) *sera normal au plan polaire du point* (x, y, z) *par rapport à un complexe linéaire.*

On verrait aisément que l'hypothèse $\lambda\mu\rho = 0$ n'introduit que des dégénérescences banales du cas précédent.

DYNAMIQUE DES FLUIDES. — *Sur un problème d'hydraulique généralisée. Écoulement d'un mélange gazeux en combustion.* Note [1] de M. **Emile Jouguet**, transmise par M. L. Lecornu.

1. Considérons un mélange gazeux combustible enfermé dans un réservoir où règne la pression p_0 et où le volume spécifique est σ_0. Ce réservoir communique avec l'extérieur, où règne la pression p, inférieure à p_0, par un ajutage que nous supposerons parfaitement évasé pour éliminer les pertes de charge. γ étant le rapport des chaleurs spécifiques du mélange non brûlé, p est supposé supérieur à

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_0 = 0,522\, p_0,$$

de sorte que l'ajutage parfaitement évasé se compose d'une partie graduellement convergente prolongée par une partie cylindrique.

Si le mélange s'écoule *sans être enflammé*, les lois de son écoulement sont les lois classiques de l'écoulement des gaz parfaits. Le débit en masse par unité de temps et par unité de surface de la section terminale de l'ajutage est donné par la formule

$$\text{(1)} \qquad M = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\sigma_0}}\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

(1) Séance du 11 août 1919.

Imaginons maintenant qu'on fasse écouler le mélange gazeux *en l'enflammant*. Comment l'écoulement est-il modifié?

2. Il se forme un cône ayant pour base l'orifice et séparant, dans la veine fluide, la partie non brûlée de la partie en combustion. L'angle au sommet de ce cône dépend, comme l'a indiqué M. Gouy ([1]), du rapport entre la célérité de la flamme et la vitesse des molécules fluides. Selon l'interprétation que j'adopte pour les déflagrations, la surface latérale du cône doit être considérée comme une onde de choc et combustion avec chute de pression, la pression étant p_2 à l'extérieur et $p_1 > p_2$ à l'intérieur du cône. Les équations des ondes de choc et combustion donnent alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sigma_1^2} D_1^2 = \dfrac{p_2 - p_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ (p_1 + p_2)(\sigma_2 - \sigma_1) + 2(U_2 - U_1) = 0. \end{array}\right.$$

Dans ces formules, D_1 représente la célérité de la déflagration par rapport à la matière prise dans l'état 1; p, σ, U sont la pression, le volume spécifique et l'énergie interne spécifique du fluide, ces lettres étant affectées de l'indice convenable suivant le point auquel elles se rapportent. Les U sont fonctions de la température absolue T et du degré de combustion. Je supposerai la combustion totale dans l'onde, si bien que les U ne dépendent plus que des T. D'ailleurs T est relié à p et à σ par l'équation de compressibilité soit des gaz frais (pour le point 1), soit des gaz brûlés (pour le point 2). Les U sont donc des fonctions seulement des p et des σ.

p_2 et p_1 sont très probablement sensiblement constantes sur toute l'étendue de la surface du cône. Mais évitons de faire cette hypothèse, et plaçons-nous en un point particulier de cette surface. Au voisinage de la base du cône, la pression intérieure p_1 peut être considérée comme égale à la pression qui règne dans la section terminale de l'ajutage; au contraire, la pression extérieure p_2 peut être considérée, puisque nous sommes ici sur le bord de la veine gazeuse, comme égale à la pression extérieure p. C'est pour un tel point que nous supposerons écrites les équations (2). Nous pouvons donc leur adjoindre les suivantes

$$(3)\qquad p_2 = p$$

et, puisque le gaz s'écoule sans brûler entre le réservoir (état 0) et la section

([1]) *Recherches photométriques sur les flammes colorées* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 5e série, t. 18, 1879).

terminale de l'ajutage (état 1),

$$p_0\sigma_0^\gamma = p_1\sigma_1^\gamma. \tag{4}$$

Les équations (2), (3), (4), qui sont au nombre de quatre, déterminent les quatre quantités p_1, σ_1, p_2, σ_2 si l'on suppose D_1 donné ou simplement fonction connue de p_1, σ_1. Portant la valeur de p_1 ainsi obtenue dans (1) à la place de p, on obtiendra la nouvelle valeur du débit.

3. On peut terminer les calculs en tenant compte du fait que la variation de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ produite par l'onde est faible et en négligeant les quantités de l'ordre de son carré. Ils conduisent alors aux résultats suivants.

Soit T la température du mélange non brûlé quand il atteint la pression p par une détente adiabatique issue de p_0, σ_0, T_0. Calculons approximativement la température T_2 comme si c'était la température de combustion à pression constante à partir de l'état p, T. De là on tire une valeur approchée de σ_2, lequel peut donc être considéré comme connu. On trouve alors, en posant $\frac{p}{p_0} = \lambda$,

$$\Delta p = \frac{1}{\sigma_0^2}\lambda^{\frac{1}{\gamma}}\left(\sigma_2\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0\right)D_1^2.$$

D'où, par le moyen de (1),

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{1 - \frac{\gamma+1}{2}\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\,\frac{\Delta p}{p_0\lambda} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{1 - \frac{\gamma+1}{2}\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \lambda^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}\,\frac{\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_0\sigma_0^2}\left(\sigma_2\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0\right)D_1^2.$$

Cette formule donne la diminution de débit (car ΔM est négatif) résultant du fait que le gaz est enflammé à sa sortie de l'orifice. Elle contient malheureusement D_1, célérité de la flamme, dont il faudra se contenter de demander la valeur approchée à l'expérience.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation, variation du grand axe.* Note [1] de M. **Alex. Véronnet**, présentée par M. P. Appell.

En introduisant comme paramètre le grand axe, au lieu de la densité, dans les formules de discussion des figures ellipsoïdales d'équilibre (voir

[1] Séance du 15 juillet 1919.

P. Appell, note A, *Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1919), on obtient *la variation de la grandeur des figures* en même temps que la variation de la forme et l'on peut calculer *les valeurs réelles des éléments* au cours de l'évolution et de la contraction de la masse, en supposant le moment de rotation constant.

On aura pour les ellipsoïdes de révolution

$$g = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a} = 4h\sqrt{1+l^2} = 4\sqrt{1+l^2}\left(\frac{3+l^2}{l^3}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{3}{l^2}\right).$$

On démontre facilement que cette expression g est toujours croissante avec l, de 0 à 2π, pour l croissant de 0 pour la sphère, à l'infini pour le disque aplati. Inversement, le grand axe a de l'ellipsoïde est donc toujours décroissant, mais *tend vers une limite finie*.

A la limite, sur le disque, *la force centrifuge devient égale à l'attraction*, du bord jusqu'au centre. Si la Terre, supposée homogène, se contractait indéfiniment, avec le même moment de rotation, elle aboutirait à un disque de $9^{km},4$ de rayon, faisant 5,35 tours par seconde. Il faudrait que son moment de rotation ou sa vitesse de rotation soit 26 fois plus grande pour que le rayon du disque-limite soit égal au rayon actuel.

Le moment de rotation de la Lune, ajouté à celui de la Terre, l'augmente de 4,82. Il faudrait que l'ensemble se contracte encore jusqu'à ce que la densité soit 365 fois plus grande qu'actuellement pour atteindre l'aplatissement de l'ellipsoïde de bifurcation des Maclaurin-Jacobi. Le grand axe serait environ 6 fois plus petit que le rayon actuel. Le système Terre-Lune était encore plus éloigné, dans le passé, des figures de bifurcation et notre satellite n'a pas pu provenir d'un dédoublement.

Pour les ellipsoïdes à trois axes, on a la formule

$$g = \frac{50}{3fM^3}\frac{\mu^2}{a} = k\frac{s^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{6}}} = \frac{(s+t)^2}{st}\frac{h}{\sqrt{t}}.$$

A la limite, quand s tend vers zéro, cette valeur tend logarithmiquement vers l'infini, et a tend logarithmiquement vers zéro, avec b et c. *L'ellipsoïde à trois axes tend vers un ellipsoïde de révolution allongé, mais indéfiniment évanouissant.* La force centrifuge devient alors égale à l'attraction, dans la direction du grand axe, de l'extrémité au centre, comme pour les Maclaurin. La vitesse de rotation est double de celle du Maclaurin de même grand axe.

Le moment de rotation μ d'un système double de masses M et m à la distance r peut s'écrire

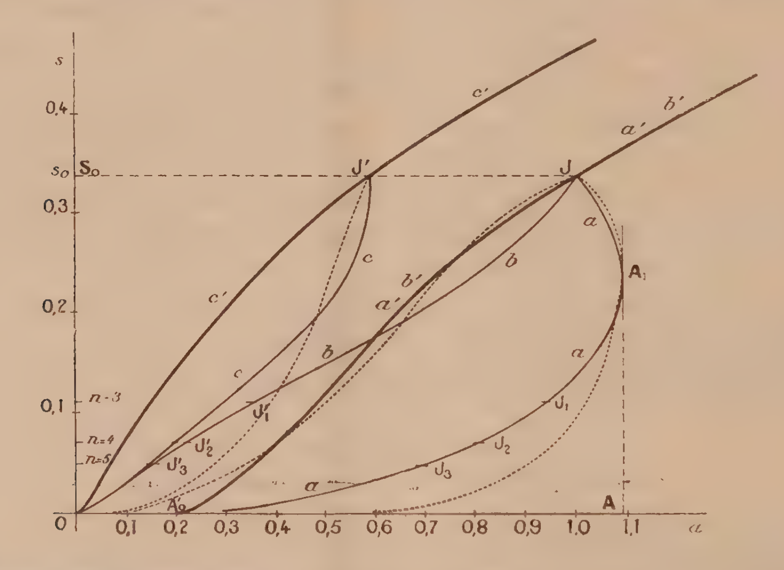
$$\frac{\mu^2}{r} = f\frac{M^2 m^2}{M+m} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha} f M^3.$$

On obtient alors

$$g = \frac{50}{3}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\,\frac{r}{a}.$$

La distance r des centres de gravité des composantes est tout au plus égale au grand axe a de l'ellipsoïde de rupture. Si l'on prend les valeurs de a et g correspondant à la figure piriforme on trouve que *la petite masse, provenant d'un dédoublement, doit être plus grande que le tiers de la masse centrale*.

Les valeurs de h relatives aux Jacobi ont été calculées par G.-H. Darwin (*Scientific papers*, t. 3, p. 130). La formule ci-dessus permet d'en déduire la valeur de g, puis celle de a et des axes b et c correspondant à tel aplatissement donné par s. La figure représente la variation réelle des deux axes



des Maclaurin en traits forts et des trois axes des Jacobi en traits fins. Les valeurs de s sont en ordonnées. Pour $s = 0$ on a les limites extrêmes : les trois axes de Jacobi tendent vers zéro à l'origine, le grand axe des Maclaurin tend vers A'_0, valeur finie. *A partir du point de bifurcation* J *le grand axe des Jacobi croît d'abord, passe par un maximum pour décroître ensuite*. Il y a dans cet intervalle *deux ellipsoïdes de Jacobi et un de Maclaurin*

qui ont même grand axe. Pour des valeurs du grand axe plus petites que le disque limite des Maclaurin, il n'y a qu'un ellipsoïde de Jacobi comme figure d'équilibre. Entre cette valeur et la bifurcation il y a un Maclaurin et un Jacobi, enfin au delà du maximum un seul Maclaurin.

Les courbes en pointillé sont celles des axes du Jacobi en prenant $\frac{1}{\rho}$ comme ordonnée. Elles donnent directement la variation de ces axes avec la contraction ou la densité ρ. Il y a toujours un maximum du grand axe des Jacobi dans la contraction.

Pour qu'il y ait dédoublement possible, pour une figure dérivée des ellipsoïdes, il faudrait que la force centrifuge tende à égaler l'attraction *avant que l'une des dimensions tende vers zéro.* En bifurquant vers les Jacobi on s'éloigne de cette condition au lieu de s'en rapprocher.

ASTRONOMIE. — *Sur le prochain retour de la comète périodique* 1911, VII (*Schaumasse*). Note de MM. **G. Fayet** et **A. Schaumasse**, présentée par M. B. Baillaud.

Cet astre a été découvert, avec l'équatorial coudé de l'Observatoire de Nice, le 30 novembre 1911, environ trois semaines après son passage au périhélie. Il n'a pu être suivi que jusqu'au 16 février 1912.

Une quarantaine de mesures ont été obtenues dans le cours de cette première apparition; de leur ensemble nous avons conclu comme système d'éléments le plus probable :

Osculation : 1912 février 27,0, temps moyen de Greenwich.

$$
\begin{aligned}
M &= 12^\circ.56'.33'',0 \\
\pi &= 137.59.53,6 \\
\Omega &= 93.49.23,7 \\
i &= 17.42.\ 0,3 \\
\varphi &= 44.\ 2.\ 0,8 \\
\mu &= 439'',8297
\end{aligned}
\quad
\left.\begin{matrix}\pi\\ \Omega\\ i\end{matrix}\right\}\ \text{Eclipt. et équin. moyens 1920,0}
$$

En 1913, la comète s'est considérablement rapprochée de Jupiter; la distance mutuelle, qui est demeurée inférieure à un pendant plus de 11 mois, est descendue à 0,35 au début d'août 1913. L'évaluation des perturbations correspondantes a été assez laborieuse et, en particulier, il a fallu réduire à 5 jours l'intervalle choisi pour les quadratures, pour toute la période 1913 mai 12 à septembre 19.

Voici le montant des perturbations produites sur les éléments, par Jupiter et Saturne, depuis le 27 février 1912 jusqu'au 8 octobre 1919 :

$$\Delta M + \int\int \frac{d\mu}{dt}\,dt^2 = +3^\circ.37'.40'',0$$
$$\Delta\pi = -1.30.39,1$$
$$\Delta\Omega = -3.\ 8.\ 2,8$$
$$\Delta i = -2.58.49,5$$
$$\Delta\varphi = +1.\ 1.17,0$$
$$\Delta\mu = +4'',192$$

De sorte que les nouveaux éléments seraient :

Osculation : 1919 octobre 8,0, temps moyen de Greenwich.

$$M = 356^\circ.12'.59'',6$$
$$\left.\begin{aligned}\pi &= 136.29.14,5\\ \Omega &= 90.41.20,9\\ i &= 14.43.10,8\end{aligned}\right\}\text{ Eclipt. et équin. moyens 1920,0}$$
$$\varphi = 45.\ 3.17,8$$
$$\mu = 444'',022$$

Le prochain passage au périhélie, qui se trouve avancé d'environ un mois par le fait des perturbations, aurait donc lieu vers le 8 novembre prochain. Au début de septembre, la comète sera située par 7^h d'ascension droite et 19° de déclinaison boréale; malgré sa faiblesse probable, elle pourrait être recherchée, dès cette époque, à l'aide de plus grands instruments.

ASTRONOMIE. — *Astrolabe photographique impersonnel.* Note de M. **René Baillaud**, présentée par M. B. Baillaud.

J'ai pu mettre au point, grâce au concours de l'Établissement central du Matériel de la Radiotélégraphie militaire, un astrolabe photographique, dont j'avais d'ailleurs déjà indiqué le principe, en 1914, dans les *Comptes rendus* (¹).

L'appareil se compose des mêmes éléments essentiels que l'astrolabe visuel de MM. Claude et Driencourt. Mais le prisme est retourné : l'arête (horizontale) du dièdre formé par les deux faces obliques est située contre l'objectif. Ces deux faces sont argentées. Quand la hauteur apparente de l'étoile a une valeur voisine de l'angle du prisme, le faisceau de rayons

(¹) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 1249.

parallèles que l'on en reçoit frappe la face supérieure du prisme directement, la face inférieure, après réflexion sur le bain du mercure, et donne dans le champ, après s'être réfléchi sur ces deux faces, deux images qui se déplacent de la même manière que dans l'astrolabe ordinaire.

Cette disposition du prisme offre deux avantages :

1° L'angle du prisme est arbitraire;

2° Les rayons lumineux ne pénétrant pas dans le prisme, mais se réfléchissant seulement sur ses faces, on peut, sans inconvénient, utilisant des prismes dont la matière ne soit pas absolument homogène, leur donner de grandes dimensions, ce qui est ici indispensable.

L'angle du prisme de l'astrolabe dont il est ici question a été choisi de 60°. Le diamètre de l'objectif est de 10^{cm}, sa distance focale de 1^{m}.

Dans le plan focal, peut être placé un châssis photographique. Le prisme étant supposé réglé et l'appareil étant calé à l'azimut de l'étoile, les deux images de celle-ci tracent sur la plaque deux traînées. Ces traînées sont interrompues à des secondes rondes au moyen d'un obturateur à volets placé contre la plaque et commandé par une pendule. Les volets restent ouverts pendant une seconde et fermés pendant trois secondes. Les traînées sont ainsi composées d'une série de traits équidistants et l'on peut mesurer sur la plaque les positions occupées par les deux images à des instants correspondant à des secondes rondes et enregistrés sur un chronographe. De l'ensemble d'une série de points correspondants, on peut aisément déduire l'heure de la coïncidence. On voit que l'appareil est entièrement impersonnel, l'observateur ayant pour seule besogne de caler la lunette et de mettre les plaques dans le châssis.

J'ai eu à surmonter une assez grosse difficulté du fait des vibrations du bain de mercure sous l'influence des vibrations du sol. J'ai obtenu un résultat satisfaisant en faisant nager le bain de mercure sur un autre bain de mercure à couche très épaisse.

Prenons pour axe des x l'axe optique de la lunette, supposé horizontal; pour axe des z la verticale passant par le centre optique O et un axe des y perpendiculaire au plan xOz. Soit h et A la hauteur et l'azimut d'une étoile en observation et soit A_1 l'angle que fait le plan des zx avec le plan du méridien. Soit $(60° + a)$ l'angle du prisme.

Posons

$$h = 60° + a + \varepsilon \quad \text{et} \quad A_1 - A = \mu,$$

où a, ε et μ sont petits.

Soit $30° - \eta$ l'angle que fait avec l'axe des z la normale à la face supérieure du prisme. Soit ζ l'angle que fait avec l'axe des x, la projection de cette normale sur le plan xOy. Soit de même $150° - \eta'$, l'angle que fait avec l'axe des z la normale à la face inférieure du prisme et soit ζ' l'angle que fait avec l'axe des x la projection de cette normale sur le plan xOy.

Désignant par Y_1Z_1, Y_2Z_2 les coordonnées des images sur la plaque, on établit assez facilement que

$$\frac{Y_1}{f} = \frac{\zeta - \mu}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon + a)(\zeta + \mu), \qquad \frac{Y_2}{f} = \frac{\zeta' - \mu}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon + a)(\zeta' - \mu),$$

$$\frac{Z_1}{f} = \varepsilon + 2\eta + \frac{\sqrt{3}}{8}(\mu + \zeta)^2, \qquad \frac{Z_2}{f} = -\varepsilon - 2\eta' - \frac{\sqrt{3}}{8}(\mu + \zeta')^2$$

avec la relation

$$\eta + \eta' = -a - \frac{\sqrt{3}}{2}(\zeta' - \zeta)^2,$$

où f désigne la distance focale de l'objectif.

Si l'on admet que les termes du second ordre sont négligeables, ces équations donnent simplement

$$\frac{Y_1 - Y_2}{f} = \frac{\zeta - \zeta'}{2}, \qquad \frac{Z_1 - Z_2}{f} = 2\varepsilon.$$

Par définition on appelle *coïncidence* l'instant où ε est nul. Les deux images sont alors situées sur une même horizontale (horizontale de coïncidence). On voit immédiatement par l'examen des formules précédentes que l'horizontale de coïncidence est, sur la plaque, parallèle à la bissectrice de l'angle des deux traînées et qu'elle est définie comme la droite qui joint les milieux des points correspondants.

On place la plaque sur une machine de mesure, en l'orientant de telle manière que le fil mobile du micromètre soit parallèle à la bissectrice de l'angle des traînées. Soit $Z_{\rm II}$ le Z de l'horizontale de coïncidence. $Z_{\rm II}$ est la moyenne des Z des points correspondants. On adoptera pour $Z_{\rm II}$ la moyenne des $Z_{\rm II}$ ainsi déterminés par chaque couple de points correspondants. Soit Z_i le Z d'un point de la traînée directe. Posons

$$Z_i - Z_{\rm II} = \lambda_i.$$

Chaque point de la traînée directe donne une équation de la forme

$$Z_i = at_i + b.$$

Soient Z_m la moyenne des Z_i et t_m la moyenne des heures observées.

On a

$$a = \frac{Z_m - Z_i}{t_m - t_i}.$$

On a autant de relations de cette forme qu'il y a de points sur la traînée directe. Soit a_m la moyenne des a ainsi obtenus.

On a, d'autre part, pour chaque point,

$$\lambda_i = a_m (t_i - t_{\text{II}}),$$

équation qui donne le temps écoulé entre l'instant t_i relatif à un point de la trajectoire et la coïncidence t_{II}.

Je donne ci-dessous, à titre d'exemple, sur une première ligne, les centièmes de seconde des heures de la coïncidence déduites, par la méthode précédente, des points tracés par l'étoile α Cygne sur un cliché pris le 7 août 1919, et, sur une seconde ligne, leurs écarts avec la moyenne :

Coïncidence :	15,	11,	12,	19,	04,	12,	10,	11,	10,	11,	13,	14,	18,	17,	07,	15,	10,	18,	11
Résidus :	+2,	−2,	−1,	+6,	−9,	−1,	−3,	−2,	−3,	−2,	−0,	+1,	+5,	+4,	−6,	+2,	−3,	+5,	−2

Coïncidence moyenne : $17^h 46^m 32^s,126$ Résidu moyen : $\pm 0^s,03$

Ces résultats semblent pouvoir être regardés comme très satisfaisants.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur l'attaque des verres réduits en poudre.* Note de M. **Paul Nicolardot**, transmise par M. H. Le Chatelier.

Parmi les essais que j'ai effectués sur les verres [1], ceux qui permettent le mieux de les classer sont les essais systématiques à l'autoclave, à 100°, 120°, 140°, 160° et même, lorsque la chose est possible, à 180°.

Cette étude systématique n'avait jamais encore été entreprise. MM. Færster et Mylius ont bien chauffé des verres en autoclave, mais la température de 183° à laquelle ils exécutaient leur unique essai était excessive et ne permet pas de comparer entre eux la plupart des verres. Seule l'élévation systématique de la température fournit des résultats qui permettent de déterminer exactement la résistance des verres aux divers agents chimiques.

Au cours de ces recherches, j'ai été amené à étudier tout spécialement la

---

[1] *Comptes rendus*, t. **163**, 1916, p. 355. Dans cette Note s'est glissée, pour la teneur en soude du verre B, une erreur tellement évidente (31,23 pour 100 au lieu de 11,23 pour 100) qu'il a paru inutile de la rectifier.

méthode qui consiste à apprécier la valeur des verres par l'action de l'eau pure et de l'eau acidulée chlorhydrique bouillante sur ces verres réduits en poudre. Cette méthode, proposée d'abord par Kohlrausch et dont l'emploi a été rendu officiel à la Physikalische Reichsanstalt, a été critiquée par divers auteurs, notamment par MM. Haber et Schwenke. Elle dépend en effet de la finesse de la poudre, comme les essais suivants le montreront et elle met en jeu des surfaces de rupture qui diffèrent, ainsi que l'a indiqué depuis longtemps Pelouze [1], de la surface externe, la seule qui intéresse les chimistes.

Pour bien mettre en évidence le rôle de la finesse du grain ou de l'action de surface, les poudres des différents verres examinés ont été classées par six tamis, de telle manière que le rapport des surfaces des grains varie sensiblement dans le rapport des carrés 2, 4 et 16.

En réalité, les rapports des surfaces des trois sortes de grains qu'ont permis de séparer les tamis sont entre eux comme les nombres 1, 2,84 et 12,8. Deux séries d'essais ont été effectuées en plaçant dans de grands creusets en platine des poids égaux de ces trois sortes de grains, soit avec 300^{cm^3} d'eau distillée, soit avec 300^{cm^3} d'acide chlorhydrique à 10 pour 100 (décinormal). Le liquide a été maintenu à l'ébullition pendant 3 heures, le volume final étant de 100^{cm^3}. Les conditions étaient donc les mêmes que celles auxquelles les verres entiers avaient été soumis et qu'indique la Note du 9 octobre 1916.

Les pertes sont exprimées pour 1000. En tête des chiffres résultant de ces essais sont rappelés ceux déjà trouvés pour les fioles coniques dans les mêmes conditions.

Action de l'eau pure pour 1000.

	A.	B.	C.	Iéna.	Thuringe (R).	Krasna.	Kavalier.	Zsolna.
Verre entier......	0,12	0,11	0,11	0,09	0,03	0,44	0,28	0,12
Poudre grosse....	1,75	1,00	0,25	0,25	0,25	4,25	1,75	0,25
» moyenne.	2,50	2,00	1,00	0,75	0,75	9,00	2,75	0,75
» fine......	12,75	10,00	6,25	2,75	5,25	61,50	18,50	5,50

Action de l'acide chlorhydrique décinormal pour 1000.

	A.	B.	C.	Iéna.	Thuringe (R).	Krasna.	Kavalier.	Zsolna.
Verre entier.....	0,02	0,02	0,01	0,03	0,01	0,03	0,04	0,0
Poudre grosse...	0,50	0,25	1,00	2,00	0,75	2,00	0,75	1,0
» moyenne.	3,50	1,75	2,25	5,25	3,75	6,25	2,50	3,5
» fine.....	32,25	17,00	16,50	40,25	12,50	49,00	17,00	12,0

[1] *Comptes rendus*, t. 43, 1856, p. 117-123.

L'action de l'eau et de l'acide chlorhydrique décinormal varie bien avec la composition chimique des verres; mais elle dépend surtout du degré de finesse des grains. Si l'on divise respectivement les pertes par 2,84 et 12,8 pour éliminer l'influence de la surface, on obtient en effet les chiffres suivants :

Eau pure pour 1000.

	A.	B.	C.	Iéna.	Thuringe (R).	Krasna.	Kavalier.	Zsolna.
Poudre grosse...	1,75	1,00	0,25	0,25	0,25	4,25	1,75	0,25
» moyenne.	0,88	0,71	0,35	0,26	0,26	3,17	0,97	0,26
» fine.....	1,00	0,78	0,49	0,22	0,41	4,80	1,44	0,43

Acide chlorhydrique décinormal pour 1000.

	A.	B.	C.	Iéna.	Thuringe (R).	Krasna.	Kavalier.	Zsolna.
Poudre grosse...	0,50	0,25	1,00	2,00	0,75	2,00	0,75	1,00
» moyenne.	1,25	0,62	0,80	1,85	1,35	2,20	0,88	1,23
» fine.....	2,52	1,33	1,28	3,14	0,98	3,83	1,23	0,94

L'attaque des poudres de diverses grosseurs par l'eau pure est sensiblement la même; avec l'acide chlorhydrique décinormal, cette attaque augmente, en général, avec la finesse du grain.

Il est à noter en outre que presque tous les verres réduits en poudre, et entre autres le verre d'Iéna, s'attaquent plus avec l'acide chlorhydrique décinormal qu'avec l'eau pure. Ce résultat est en contradiction avec les observations généralement faites sur les récipients entiers. Il permet peut-être d'expliquer pourquoi le verre d'Iéna, après traitement à l'autoclave, laisse détacher à l'ébullition, dans les solutions d'acide décinormal, de petites paillettes et accuse une perte de poids relativement considérable (6^{mg}), alors que les verres de France B, C, D et F ne sont pas plus attaqués (0^{mg} à $0^{mg},5$) après traitement à l'autoclave qu'ils ne l'étaient auparavant.

CHIMIE ORGANIQUE. — *A propos du sel de soude saturé de l'inosite hexaphosphorique.* Note de M. S. **Posternak** (rectification), transmise par M. L. Maquenne.

J'ai indiqué, dans une Note antérieure [1], que l'inosito-hexaphosphate de soude saturé se dépose de ses dissolutions concentrées, vers 2° ou 3°, sous

[1] *Comptes rendus*, t. **168**, 1919, p. 1216.

forme de prismes clinorhombiques efflorescents, fusibles au-dessous de 46° et correspondant à la formule $C^6H^{12}O^{27}P^6Na^{12} + 44H^2O$.

J'ai reconnu depuis qu'il est possible d'obtenir une forme stable de ce composé en le faisant cristalliser vers 20°, ce qui demande beaucoup de temps, les solutions ayant tendance à rester sursaturées et la formation des cristaux étant lente. Le sel préparé dans ces conditions n'est plus efflorescent; il fond à 58°-59° et contient seulement $35H^2O$, partant à 120°.

Les mesures cristallographiques communiquées récemment (¹) se rapportent à cette modalité stable du sel dont la formule est donc

$$C^6H^{12}O^{27}P^6Na^{12} + 35H^2O.$$

et c'est pour éviter toute équivoque que j'ai cru nécessaire de faire cette rectification.

J'ajouterai en passant que le corps en question se laisse titrer avec une grande exactitude en présence d'hélianthine : le virage se produit nettement avec 6 équivalents d'acide normal. Avec la phtaléine du phénol il est progressif et par conséquent indécis, environ $\frac{10}{3}$ d'acide normal par molécule, tandis que l'acide phospho-organique libre demande $\frac{26}{3}$ équivalents de soude normale lorsqu'il est seul et 11,5 lorsqu'il est additionné de chlorure de calcium.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'évolution du mélange de sulfate diméthylique et de chlorhydrine sulfurique.* Note de MM. **Ch. Boulin** et **L.-J. Simon**, transmise par M. Ch. Moureu.

I. Lorsqu'on mélange des poids égaux de chlorhydrine sulfurique et de sulfate diméthylique, il se produit un dégagement de chaleur appréciable qui élève la température du mélange d'une dizaine de degrés. Le mélange prend, dès le début, une teinte jaune qui s'accentue avec le temps : jaune orangé au bout d'un mois, elle est rouge brun après trois mois.

Cependant l'acidité du mélange et la teneur en chlore n'ont pas changé; corrélativement, aucune pression ne se révèle, aucun dégagement gazeux ne se manifeste à l'ouverture des tubes scellés où le mélange a été conservé. Le mélange n'est cependant pas resté inerte : au lieu d'un mélange binaire, on se trouve avoir quatre corps en présence, conformément à la

(¹) *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 138.

formule

$$(1) \qquad SO^2\begin{matrix}\diagup OCH^3\\ \diagdown OCH^3\end{matrix} + SO^2\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown Cl\end{matrix} = SO^2\begin{matrix}\diagup OCH^3\\ \diagdown Cl\end{matrix} + SO^2\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown OCH^3\end{matrix}.$$

Le sulfate diméthylique a exercé son pouvoir méthylant sur l'acide chlorosulfonique, et cette réaction est limitée par la réaction inverse. Cette réaction inverse ne peut être soumise à l'étude directe tant qu'on n'aura pas isolé le sulfate acide de méthyle; mais la réaction inverse est d'une observation possible.

L'expérience a établi que, à la température ordinaire, pour un mélange équimoléculaire, l'équilibre est, à première vue, atteint au bout d'un mois et qu'il correspond à un mélange renfermant encore deux molécules de chacune des substances initiales, avec une molécule de chacune des deux autres. Autrement dit, le rapport entre le chlorosulfonate de méthyle formé à celui qui se formerait si la réaction était unilatérale est de $\frac{1}{3}$ environ.

Si nous désignons ce rapport par r,

$$r = 0,36.$$

Remarque. — Si au lieu d'employer les deux substances initiales en proportion équimoléculaire on emploie un excès de l'une d'elles (le sulfate diméthylique, 80 pour 100, pour fixer les idées), l'équilibre-limite est le même, mais il n'est atteint qu'au bout d'un temps beaucoup plus considérable :

Au bout de 27 jours, $r = 0,07$;

Au bout de 108 jours, $r = 0,25$.

On peut accélérer cette évolution vers l'équilibre en chauffant légèrement :

A 30°, après 62 heures, $r = 0,09$;

A 40°, aprés 80 heures, $r = 0,36$.

Ces particularités sont tout à fait comparables à ce que l'on sait, depuis Berthelot et Péan de Saint-Gilles, sur l'équilibre de l'éthérification.

II. Cependant le phénomène n'est comparable à une éthérification qu'en partie ou, plus exactement, pendant une première période, car au bout d'un certain temps un autre phénomène vient se superposer au premier. Ce phénomène se manifeste par une variation de l'acidité et il est dû à une réaction du sulfate acide de méthyle formé sur la chlorhydrine sulfurique présente dans l'état d'équilibre

$$(2) \qquad SO^2\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown OCH^3\end{matrix} + SO^2\begin{matrix}\diagup Cl\\ \diagdown OH\end{matrix} = SO^2\begin{matrix}\diagup Cl\\ \diagdown OCH^3\end{matrix} + SO^4H^2.$$

C'est la formation d'acide sulfurique qui élève l'acidité; simultanément, la préparation de chlorosulfonate de méthyle augmente : le rapport r s'élève. D'autre part, la proportion du sulfate acide de méthyle devrait diminuer simultanément; mais, à mesure qu'il en disparaît par le fait de la réaction (2), il en surgit par celui de la réaction (1) et il s'établit une sorte de compensation. Cette nouvelle évolution est très lente à la température ordinaire et, au bout de 138 jours, elle n'est encore pas terminée; pour l'accélérer, on élève la température; il suffit alors d'une vingtaine d'heures pour parvenir à l'état final, qui est le même, après avoir chauffé à 70° ou 100°. Le rapport $r = 0,54$; la proportion centésimale d'acide sulfurique formé est de 5 pour 100 environ.

III. Il est clair que ceci ne s'applique qu'à l'état statique et que si, par la distillation, on élimine les constituants volatils, les résultats sont très différents. Si l'on effectue une distillation sous pression réduite, on rencontre environ 50 pour 100 de chlorosulfonate de méthyle, mais simultanément la chlorhydrine disparaît presque entièrement, les sulfates monométhylique et diméthylique s'atténuent et, au contraire, l'acide sulfurique s'accumule jusqu'à approcher de 20 pour 100. On se trouve alors dans les conditions voisines de celles qui ont été envisagées pour la préparation du chlorosulfonate de méthyle [1]. En même temps, il se produit un certain déficit de chlore dû à une perte légère en produits volatils : gaz chlorhydrique et chlorure de méthyle.

La complexité s'accentue encore si l'on distille à la pression ordinaire : il apparaît de l'anhydride sulfurique, la matière charbonne et il en résulte du gaz sulfureux, etc.

IV. On ne peut donc songer à utiliser pour l'analyse des mélanges dont il a été question, l'emploi de la distillation fractionnée, même sous pression réduite, puisque les réactions se poursuivraient au cours de cette distillation.

On y parvient par un traitement préalable avec du sel marin fondu et pulvérisé qui fait passer les substances acides à l'état de sels : chlorosulfonate, méthylsulfate et sulfate de sodium. On distille ensuite sous pression réduite. On n'a plus affaire qu'à un mélange de chlorosulfonate et de sulfate neutre de méthyle. La détermination de l'acidité et du chlore four-

---

(1) Voir *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 140 et 234.

nissent deux données concordantes conformément aux formules

$$SO^2\begin{cases} O\,CH^3 \\ Cl \end{cases} + 3K\,OH = SO^4K^2 + K\,Cl + CH^3OH + H^2O,$$

$$SO^4(CH^3)^2 + K\,OH = SO^2\begin{cases} O\,CH^3 \\ OK \end{cases} + CH^3OH.$$

Pour ce qui concerne l'acide sulfurique formé, il résulte de la comparaison de l'acidité finale et de l'acidité initiale sur deux prises d'échantillon.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'oxydation de la benzaldoxime.* Note [1] de MM. **J. Bougault** et **P. Robin**, présentée par M. Ém. Bourquelot.

L'un de nous a étudié précédemment l'action de l'iode et du carbonate de soude sur les oximes des acides α-cétoniques. La réaction est complexe. Pour prendre un exemple, l'oxime de l'acide phénylglyoxylique donne ainsi, outre des produits de décomposition plus avancée ($C^6H^5.CO^2H$, CO^2, etc.), du benzonitrile et du peroxyde de diphénylglyoxime [2] :

$$\underset{\overset{\|}{NOH}}{C^6H^5.C.CO^2H} \rightarrow C^6H^5.CN \quad \text{et} \quad \underset{N.O.O.N}{C^6H^5.\overset{}{C}\text{———}C.C^6H^5}.$$

Comme on le voit, le groupe CO^2 s'élimine au cours de l'opération et tout semble se passer comme si l'oxydation portait sur l'oxime de l'aldéhyde (ici l'aldéhyde benzoïque) résultant du départ de CO^2 dans l'acide α-cétonique. Il était donc naturel de chercher si l'on n'arriverait pas au même résultat en partant des oximes des aldéhydes elles-mêmes.

Nos expériences, effectuées d'abord sur l'oxime de la benzaldéhyde, n'ont pas confirmé ces prévisions.

I. L'action de l'iode et du carbonate de soude sur la benzaldoxime est très complexe. Elle nous a fourni, en dehors de l'acide benzoïque, au moins trois corps que nous avons pu isoler et caractériser, savoir :

---

(1) Séance du 11 août 1919.

(2) Dans la première Communication rappelée plus haut, il avait été annoncé que cette réaction donnait, à côté du nitrile, un acidylhydroxamide (dans l'espèce $C^6H^5.COH.NOH$). Cette affirmation, qui reposait sur une analyse erronée, a été rectifiée (voir J. Bougault, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, t. 25, 1919, p. 384).

1° Du peroxyde de benzaldoxime,

$$C^6H^5.C\langle{}^{H}_{NO.ON}{}^{H}\rangle C.C^6H^5;$$

2° De la benzoylbenzaldoxime,

$$C^6H^5.CH.NO.CO.C^6H^5;$$

3° De la dibenzényloxoazoxime,

$$C^6H^5.C\langle{}^{NO}_{N(=O)}\rangle C.C^6H^5.$$

Ces trois composés avaient été signalés, mais obtenus par des voies différentes. Nous les avons identifiés : les deux premiers en les préparant par les procédés connus et les comparant avec nos produits; le troisième, par le dosage du carbone et de l'hydrogène, par la réduction en dibenzénylazoxime

$$C^6H^5.C\langle{}^{N}_{O.N}\rangle C.C^6H^5$$

au moyen du zinc et de l'acide acétique, enfin par l'obtention de benzonitrile et d'acide benzoïque sous l'influence de l'eau bouillante.

L'identification des trois composés n'est donc pas douteuse.

II. Leur obtention à partir de la benzaldoxime se réalise comme suit :

On dissout 100^g de benzaldoxime brute (mélange des isomères α et β) dans 300$^{cm^3}$ de benzène; on y ajoute une solution de 375^g de carbonate de soude cristallisé dans 1000$^{cm^3}$ d'eau. Dans ce mélange, constamment agité, on verse peu à peu 425$^{cm^3}$ de solution d'iode (I + KI) au cinquième, jusqu'à excès persistant 12 heures. Au bout de ce temps, on détruit l'iode restant par l'hyposulfite de sodium.

Le précipité, qui se forme dès le début de l'addition d'iode, est le peroxyde de benzaldoxime; on le recueille par filtration.

La solution benzénique contient les deux autres composés qui peuvent en être extraits et séparés par des cristallisations convenablement conduites.

Mais il est plus avantageux d'utiliser, pour leur séparation, la propriété que nous avons reconnue à ces corps de se combiner à l'iode, dans des conditions d'ailleurs différentes pour chacun d'eux.

Si, à une solution éthérée, même assez diluée de dibenzényloxoazoxime, on ajoute de l'iode, il se forme une combinaison cristallisée brune, à reflets mordorés, très peu soluble dans ce dissolvant. Cette combinaison, assez

stable, répond à la formule $C^{14}H^{10}N^2O^2I^2$ et est susceptible de régénérer la dibenzényloxoazoxime par simple agitation avec une solution aqueuse d'hyposulfite de sodium.

Ayant ainsi débarrassé le mélange de la presque totalité de la dibenzényloxoazoxime, on reprend le résidu par très peu de benzène et on l'agite avec une solution concentrée de carbonate de soude et d'iode. Il se forme une combinaison iodée noir verdâtre de benzoylbenzaldoxime, dont nous n'avons pas déterminé la composition. Nous avons seulement observé qu'elle régénère la benzoylbenzaldoxime sous l'action de l'hyposulfite de sodium, ce qui suffisait pour le but à atteindre.

Les rendements dans cette opération sont les suivants :

Peroxyde de benzaldoxime........	35	pour 100
Benzoylbenzaldoxime.............	4 à 6	»
Dibenzényloxoazoxime............	15 à 20	»

La séance est levée à 16 heures.

A. Lx.